eTraffic project
2. rész

Forgalmi modellezés

Specifikáció

Tartalomjegyzék

[1 Modellezési metodika 1](#_Toc385632525)

[2 Útvonal keresés 2](#_Toc385632526)

[2.1 Elméleti felépítés 2](#_Toc385632527)

[2.2 Bemenet 3](#_Toc385632528)

[2.3 Kimenet 3](#_Toc385632529)

[3 Forgalom szétosztás 4](#_Toc385632530)

[3.1 Elméleti felépítés 4](#_Toc385632531)

[3.1.1 Gravitációs modell 5](#_Toc385632532)

[3.1.2 Furness-féle kiegyenlítés 6](#_Toc385632533)

[3.1.3 Lohse-féle kiegyenlítés 7](#_Toc385632534)

[3.2 Bemenet 8](#_Toc385632535)

[3.3 Kimenet 8](#_Toc385632536)

[4 Forgalom ráterhelés (Mindent-vagy-semmit) 9](#_Toc385632537)

[4.1 Elméleti felépítés 9](#_Toc385632538)

[4.2 Bemenet 9](#_Toc385632539)

[4.3 Kimenet 9](#_Toc385632540)

[5 Forgalom ráterhelés (Növekményes) 10](#_Toc385632541)

[5.1 Elméleti felépítés 10](#_Toc385632542)

[5.2 Bemenet 10](#_Toc385632543)

[5.3 Kimenet 10](#_Toc385632544)

[6 Forgalom ráterhelés (Egyensúlyi) 11](#_Toc385632545)

[6.1 Elméleti felépítés 11](#_Toc385632546)

[6.2 Bemenet 13](#_Toc385632547)

[6.3 Kimenet 13](#_Toc385632548)

# Modellezési metodika

E specifikációs dokumentum a közlekedési modellezés módszertanának jelen fejlesztési szakaszban releváns részét mutatja be.

A forgalmi modellezést végző keretrendszer a következő műveleteket végzi el:

* A közúthálózatot leíró adatok kigyűjtése adatbázisból.
* A forgalom kibocsájtási és vonzási (mely nem keverendő össze a máshol ismertetett vonzás-függvénnyel) értékek kiválasztása adatbázisból.
* A forgalom kibocsájtási és vonzási adatok alapján a forgalom szétosztása, tehát a célforgalmi igények meghatározása. Az alkalmazott mátrix kiegyenlítési eljárás választható:
	+ Furness
	+ Lohse
* A célforgalomnak az úthálózathoz rendelése (ráterhelése) a kívánt algoritmus alapján, mely lehet:
	+ Mindent-vagy-semmit
	+ Növekményes
	+ Egyensúlyi
* A ráterhelés végeredményének, a hálózati élenként meghatározott forgalomnagyságnak visszatöltése adatbázisba

Megemlítendő, fontos eljárás a fentiek mellett az útvonal keresés, azaz legrövidebb útvonal meghatározásának eljárása, mely mind a forgalom szétosztás, mind a forgalom ráterhelés művelete során többször is elvégzésre kerül.

A műveletek sorrendje – azok egymásra épülése miatt – nem felcserélhető. Az egyes műveletek részletes felépítése, adatigénye, kimeneti értékei a következő fejezetekben kerülnek bemutatásra. Az adatbázisból történő beolvasás, mentés – mint nem forgalmi modell specifikus műveletek – nem kerülnek részletezésre.

# Útvonal keresés

Az útvonal keresési eljárás a forgalmi modellezést végző keretrendszer több művelet-együttesében is szerephez jut. Magas műveleti száma miatt a hálózat méretétől függően igen időigényes eljárás lehet. Ezért ismertetésére a műveletek leírását megelőzően, külön kerül sor. Az érintett műveletek:

* A forgalom szétosztás gravitációs modelljében szereplő vonzás függvény két pont közti utazási költség paraméterét jelen fejlesztési fázisban a két pont közti legrövidebb útvonalhoz tartozó utazási idő helyettesíti. Ennek meghatározásához szükséges az útvonal keresési eljárás.
* A forgalmi ráterhelési eljárások mindegyikében az – adott körülmények közt – legrövidebb úthoz történik – az adott nagyságú – forgalomnagyság hozzárendelése.

Megjegyzendő, hogy – mint a későbbiekben bemutatásra kerül – az út „rövidsége” nem korlátozódik pusztán az eljutás időigényére. A legrövidebb, út meghatározása során a hálózat útszakaszaihoz hozzárendelt súlyok kerülnek összegzésre, melyek közül mindig a legkisebb összeg lesz propagálva, tovább érvényesítve. Így az eljárás befejezésével a legrövidebb útvonal a legkisebb súly-összeggel rendelkező útvonal lesz. Tehát ha az útszakaszokhoz rendelt súlyok nem utazási idők, hanem az utazás pénzben kifejezett költségei, akkor a meghatározott „legrövidebb” út a leggazdaságosabb út lesz. Ezért a szövegben a legrövidebb, illetve leggazdaságosabb kifejezések szinonimaként felcserélhetők.

## Elméleti felépítés

Az útvonal keresés az úgynevezett Dijkstra algoritmus használatával valósul meg. A Dijkstra algoritmus egy kiindulópont-alapú útvonalkeresés, mely során megadott pontból a gráf minden pontjához meghatározásra kerül az azt a kiindulóponttal összekötő legrövidebb útvonal.

Röviden megfogalmazva az algoritmus a kiinduló ponttal kezdve végiglépked a gráf minden pontján, és a bejárás során a pontokat utazási ráfordítás címkékkel látja el:

* A ráfordítás-címkék a kiindulóponttól hozzájuk tartó pillanatnyilag felderített legkisebb utazási ráfordítást mutatják, de értékük a gráf felderítése során többször is változhat (csak csökkenhet). A címkék kezdeti állapotban végtelen értéket mutatnak, mire az eljárás véget ér, valós értékkel fognak rendelkezni. A valós címkével nem rendelkező pontok a bejárás során elérhetetlennek minősültek.
* A megelőző-pont-címkék a kiindulóponttól az adott pontig tartó legrövidebb útvonal csomópont láncolatának az adott pontot megelőző pont megjelölését tartalmazzák. E címkék kezdeti állapotban üresek, az eljárás végére értékkel rendelkeznek. Érték nélküli címke szintén a kiindulópontból elérhetetlen csomópontot mutat.

Pontosabban a következő műveletek kerülnek sorra:

1. az aktuális vizsgálati pontból elérhető további pontok összegyűjtése, felírása a „felderítendők” listájára – ha még nincs rajta a „már felderítettek” listáján.
2. minden szomszédos ponthoz tartozó utazási ráfordítások kiértékelése: ha a ponthoz felírt pillanatnyi ráfordítás értéke nagyobb, mint az aktuális vizsgálati ponthoz tartozó ráfordítás és az aktuálisat az adott ponttal összekötő út ráfordításának összege, azt erre a kisebb értékre cserélni és a megelőző-pont-címkét az aktuális pont jelére módosítani, egyébként meghagyni mindkét címke értékét.
3. az aktuális pont áthelyezése a „felderítendők” listájáról a „már felderítettek” listájára
4. a „felderítendők” listájáról a legkisebb ráfordítás-címkével rendelkező pont kiválasztása a következő vizsgálati pontnak, ugrás az 1. pontra.

Az eljárás végeztével a gráf minden pontjához meghatározható a kiindulópontból odavezető legrövidebb útvonal a végpont felől történő visszafejtéssel. A visszafejtés során egy fordított (First In – Last Out) listát kell létrehozni az útvonalba tartozó csomópontokból. Elsőként a végpont kerül bele, következőként a végponthoz tartozó megelőző-pont-címke által meghatározott pont, majd e megelőző ponthoz tartozó megelőző-pont-címke tartalom, és így tovább egészen addig, míg a címke tartalma üres, tehát elértünk a kiinduló pontba.

Gyakorlati megjegyzések:

* érdemes mind a csomóponti címkéket, mind a felkeresendő/felkeresett listákat egy-egy n elemű műveleti vektorban tárolni az eljárás során (n a gráf pontjainak száma).
* a ráfordítás-címkékhez praktikusan végtelen közeli (pl. 999999) értékeket lehet rendelni, mely legalább egy nagyságrenddel meghaladja a várható legnagyobb ráfordítás értékét.
* ha a gráf csomópontjairól lista készül, akkor azoknak e listában elfoglalt helye, sorszáma azonosítja a csomópontot, tetszőleges csomópont elnevezések esetén is.
* a fent említett csomópont sorszámot párosítva a felkeresendő/felkeresett vektorok indexével, elegendő a vektorok adott csomóponti sorszámmal azonos indexének helyén egy nem-igen, vagy 0-1 értéket tárolni, ezzel jelölve, hogy az a csomópont felkeresendő-e vagy sem.

## Bemenet

Bemenetként szükséges:

* Úthálózati gráf. A csomópontok, valamint az azokat összekötő élek halmaza.
* A hálózati elemek – jelen esetben kizárólag az élek – súlyszámai, mely alapján az adott él „rövidsége”, a rajta történt utazás gazdaságossága eldönthető. E súly lehet pusztán a hossz, vagy akár a hosszból és megengedett sebességből származtatható menetidő, de ezen túl a menetidőből és útdíjból származtatható utazási költség is.

## Kimenet

Az eljárás kimeneteként megadható:

* A korábban ismertetett backnode vektor.
* A backnode vektor visszafejtéséből adódó legrövidebb útvonal viszonylatonként.

Jelen esetben a visszafejtett útvonalak adják a kimeneti értéket.

# Forgalom szétosztás

## Elméleti felépítés

A forgalom keltési művelet (részletezése más dokumentáció tárgya) eredményeként adódó kiinduló és megérkező forgalom vektorokból – összefoglalóan a forgalmi igényből – a forgalom szétosztás során kerül kiképzésre a pontos célforgalmi igény. A kétfajta mérőszám közt az összefüggés szoros:

* A kiinduló forgalmi igény két értéke mondja meg utazási körzetenként – azaz zónánként – a körzetből kiinduló forgalom nagyságát.

$$O\_{i}$$

* A beérkező forgalmi igény két értéke mondja meg utazási körzetenként az oda beérkező forgalom nagyságát.

$$D\_{j}$$

* A célforgalmi igény ennél specifikusabb, két adott körzet közt lezajló, irányspecifikus (egyik körzetből a másikba tartó) forgalom nagyságát írja le.

$$T\_{ij}$$

* Egy körzet kiinduló forgalma megegyezik az összes olyan célforgalom értékkel, melynek kezdőpontja az a körzet.

$$O\_{i}=T\_{i1}+T\_{i2}+…+T\_{in}=\sum\_{j}^{}T\_{ij}$$

* Az adott körzet beérkező forgalma az olyan célforgalmak összege, melyek végpontja az a körzet.

$$D\_{j}=T\_{1j}+T\_{2j}+…+T\_{nj}=\sum\_{i}^{}T\_{ij}$$

* A kiinduló forgalomnagyságok összege megegyezik a beérkező forgalomnagyságok összegével, tehát jármű nem vész el és nem keletkezik a körzeteken kívül.

$$\sum\_{ij}^{}T\_{ij}=\sum\_{i}^{}O\_{i}=\sum\_{j}^{}D\_{j}$$

A fenti kritériumoknak – a megkívánt pontosság mellett – a forgalom szétosztás elvégzése után teljesülniük kell. A szétosztás – tehát az $O\_{i}$ és $D\_{j}$ vektorokból a $T\_{ij}$ mátrix meghatározása – a közlekedési modellezés módszertana szerint több eljárás szerint történhet. Ezek közül a tárgyi projekt jelen fejlesztési szintjén a szintetikus, gravitációs modell került alkalmazásra, melynek ismertetése a 3.1.1. fejezet tárgya.

A modell csak a kiindulási vektorok és a kérdéses mátrix elemei közti összefüggést adja meg. Az összefüggés kielégítését mátrix kiegyenlítő eljárásokkal lehet elvégezni, melyek közül két lehetséges variáns – a Furness-féle és a Lohse-féle – került beépítésre a forgalmi modellező keretrendszerbe. Mindkét eljárásnak megvan a maga előnye, melyeket a következő fejezetek mutatnak be.

A forgalomszétosztási eljárás menete:

1. Forgalmi igény vektorok feltöltése értékekkel
2. A célforgalmi mátrix elemeinek kezdeti értékadása az alkalmazott – gravitációs – modell alapján. Ezen értékek a továbbiakban többször módosításra kerülnek.
3. A célforgalmi mátrix elemeinek kiegyenlítése az alkalmazott – Furness, vagy Lohse – mátrix kiegyenlítő eljárással. Az eljárás nem készít végleges mátrixot, hanem kis mértékben javít rajta.
4. A célforgalmi mátrixot minősítő érték kiszámolása. Az érték attól függ, hogy a kiegyenlített mátrix elemeit összegezve mekkora eltérés tapasztalható az előzőekben ismertetett összegzési kritériumokhoz képest.
5. Ha a mátrix minősítése nem megfelelő – tehát nem áll elég közel az ideális állapothoz – a kiegyenlítés újra elindul, az aktuális mátrix értékek alapján. Tehát ugrás a 3. pontra.

A minősítő értékek két vektor értékeit takarják, melyek meghatározása egyetlen minősítő számérték alapján történik.

$$ε^{O}\_{i}=\frac{1}{Q∙\sqrt{O\_{i}}}$$

$$ε^{D}\_{j}=\frac{1}{Q∙\sqrt{D\_{j}}}$$

ahol: Q minősítő számérték

### Gravitációs modell

E modell egy célforgalmi viszonylat – tehát egy kiindulási és egy megérkezési körzetpár közt – a forgalom nagyságát a kezdő körzet kiinduló és a célkörzet beérkező forgalomnagyságainak függvényeként írja le, melyet egy vonzás-függvénnyel súlyoz.

$$T\_{ij}=O\_{i}∙D\_{j}∙f\left(c\_{ij}\right)$$

A vonzás függvény legtöbb esetben a célforgalmi viszonylat utazási ráfordításának függvényében adja meg eredményét. A függvény alakja több szokásos forma közül választható, melyek bemutatását a Költség alapú függvények című dokumentáció tartalmazza. Jelen esetben a kombinált függvényalak kerül alkalmazásra, annak nagy rugalmassága miatt.

$$f\left(c\_{ij}\right)=α∙c\_{ij}^{β}∙e^{γ∙c\_{ij}}$$

A függvény változója, a két pont közti utazási ráfordítás mértéke a korábban ismertetett Dijkstra algoritmussal meghatározott legkisebb utazási ráfordítás. Ezen útvonalkeresés a forgalommal nem terhelt hálózaton kerül végrehajtásra.

$$c\_{ij}=t\_{ij}^{SP}$$

A kiinduló és érkező forgalmi igény vektorok oly módon való szétosztása, hogy a végeredményként kapott célforgalmi mátrix eleget tegyen a fejezetben ismertetett kritériumoknak, iteratív mátrix kiegyenlítő eljárással megy végbe. Azonban ezek az eljárások működésükhöz kiegyenlítő segédtényezők bevezetését igénylik, így a gravitációs modell gyakorlatban alkalmazható formája a következőre módosul:

$$T\_{ij}=A\_{i}∙O\_{i}∙B\_{j}∙D\_{j}∙f\left(c\_{ij}\right)$$

A modellben szereplő kiinduló és megérkező forgalmak, valamint a vonzás függvény által adott súly kötött értékű. A kiegyenlítő tényező vektorok értékeinek változatása megy végbe a továbbiakban.

### Furness-féle kiegyenlítés

Az eljárás menete:

1. Az $B\_{j}$ kiegyenlítő vektor elemeihez kezdeti értékként 1 hozzárendelése. E művelet határozza meg, hogy az iterációk végeztével mely jellemző, $O\_{i}$, vagy $D\_{j}$ lesz az, melynek értékeit jobban megközelítik a célforgalmi mátrix sor- vagy oszlopösszegei. Az $A\_{i}$ vektor kiválasztásával az $O\_{i}$, és a $B\_{j}$ vektor kiválasztásával a $D\_{j}$ értékek közelíthetők meg jobban. Természetesen ehhez a kiválasztáshoz kell igazítani a következő két lépést is.

$$B\_{j}=1$$

1. $A\_{i}$ értékeinek meghatározása a gravitációs modell képlete és a $B\_{j}$ értékek alapján

$$A\_{i}=\frac{1}{\sum\_{j}^{}B\_{j}∙D\_{j}∙f\left(c\_{ij}\right)}$$

1. $B\_{j}$ értékeinek meghatározása a gravitációs modell képlete és az $A\_{i}$ értékek alapján

$$B\_{j}=\frac{1}{\sum\_{i}^{}A\_{i}∙O\_{i}∙f\left(c\_{ij}\right)}$$

1. $T\_{ij}$ értékek frissítése a kiegyenlítő vektorok alapján

$$T\_{ij}=A\_{i}∙O\_{i}∙B\_{j}∙D\_{j}∙f\left(c\_{ij}\right)$$

1. Ha a konvergencia teljesült, vagy ha az ismétlések száma elérte a maximális iterációs korlátot, a folyamat leáll, egyébként folytatódik a 2. ponttól. A konvergencia a következőképp kerül ellenőrzésre

$$\left|\frac{\sum\_{j}^{}T\_{ij}}{O\_{i}}-1\right|>ε^{O}\_{i} , ∀ O\_{i}$$

$$\left|\frac{\sum\_{i}^{}T\_{ij}}{D\_{j}}-1\right|>ε^{D}\_{j} , ∀ D\_{j}$$

A Furness-féle kiegyenlítés előnye, hogy a kezdeti kiegyenlítő tényező vektor megválasztásával szabályozható, hogy mely bemenő érték vektor ($O\_{i}$, vagy $D\_{j}$) értékeit közelítse meg pontosan a végeredmény. Ez abban az esetben hasznos, ha valamely jellemző – a kiinduló, vagy a megérkező forgalom – értéke a másiknál nagyobb megbízhatósággal rendelkezik.

### Lohse-féle kiegyenlítés

A Lohse-féle Multi kiegyenlítés a kiegyenlítő vektorok értékeit nem egymás alapján határozza meg, hanem egymástól függetlenül.

1. A célforgalmi mátrix feltöltése kezdeti értékekkel. E lépés fontos, a rossz értékválasztás nagyban befolyásolja a konvergencia sebességét. Az értékeknek az egymáshoz képest vett aránya nagyobb jelentőséggel bír, mint diszkrét nagyságuk. Gravitációs modell alkalmazása esetén – mint jelen esetben is – a vonzás függvény értéke jó kiindulási alapnak tekinthető.

$$T\_{ij}=f\left(c\_{ij}\right)$$

1. Az $A\_{i}$ kiegyenlítő vektor elemeinek kiszámítása.

$$A\_{i}=\frac{1}{\sum\_{j}^{}T\_{ij}∙\frac{D\_{j}}{\sum\_{i}^{}T\_{ij}}}$$

1. A $B\_{j}$ kiegyenlítő vektor elemeinek kiszámítása.

$$B\_{j}=\frac{1}{\sum\_{i}^{}T\_{ij}∙\frac{O\_{i}}{\sum\_{j}^{}T\_{ij}}}$$

1. A $T\_{ij}$ célforgalmak számítása.

$$T\_{ij}=A\_{i}∙O\_{i}∙B\_{j}∙D\_{j}∙\frac{\sum\_{i}^{}O\_{i}}{\sum\_{ij}^{}T\_{ij}}$$

Megjegyzendő, hogy a képletben szereplő $\sum\_{i}^{}O\_{i}$ érték felcserélhető a $\sum\_{j}^{}D\_{j}$ értékkel, hiszen a két összegnek azonosnak kell lennie.

1. Ha a konvergencia teljesült, vagy ha az ismétlések száma elérte a maximális iterációs korlátot, a folyamat leáll, egyébként folytatódik a 2. ponttól. A konvergencia a következőképp kerül ellenőrzésre

$$\left|\frac{\sum\_{j}^{}T\_{ij}}{O\_{i}}-1\right|>ε^{O}\_{i} , ∀ O\_{i}$$

$$\left|\frac{\sum\_{i}^{}T\_{ij}}{D\_{j}}-1\right|>ε^{D}\_{j} , ∀ D\_{j}$$

A Lohse-féle eljárás előnye, hogy – a célforgalmi mátrix kezdeti értékadása miatt – az eredmények illeszkedése egyenletesebb a Furness eljárásnál. A bemenő értéke vektorokhoz szimmetrikusabban konvergál a célforgalmi mátrix.

## Bemenet

Bemenetként szükséges:

* Forgalmi igény körzetenként.
* A gravitációs modellhez:
	+ A vonzás függvény változójaként szereplő utazási ráfordítások viszonylatonként.
	+ A vonzás függvény alakja (képlete).
	+ A vonzás függvény alakjához tartozó paraméterek.
* A mátrix kiegyenlítéshez:
	+ Iterációk legnagyobb száma.
	+ A kiegyenlítés minőség mutatójának megkívánt értéke.

## Kimenet

Az eljárás kimenete:

* Forgalmi igény viszonylatonként.

# Forgalom ráterhelés (Mindent-vagy-semmit)

## Elméleti felépítés

A mindent-vagy-semmit ráthelés során a forgalmi igény egyszerre kerül hozzárendelésre az egyes célforgalmi viszonylatok közt megtalált legrövidebb útvonalakba eső gráf élekhez. Egy-egy él forgalomnagysága a rajt áthaladó útvonalakhoz tartozó forgalmak összege lesz.

A műveleti sorrend:

* Legrövidebb, legkisebb ráfordítással járó úrvonal meghatározása minden célforgalmi kapcsolathoz.
* A célforgalmi értékek hozzáadása minden kapcsolatnál a megtalált útvonal éleihez.

E ráterhelési mód használata olyan úthálózati elrendezés esetén célszerű, ahol nincsenek valódi alternatív útvonalak. Előzetes becslések szerint a projektben tervezett közúthálózati modell is ilyen jellegű, azonban ennek eldöntése csak az egyéb ráterhelési módokkal végzett próba után lehetséges. A mindent-vagy-semmit ráterhelés igen időtakarékos megoldás. Ha az utazás szétosztási művelet gravitációs modellje az üres hálózaton meghatározható legrövidebb utazási idők alapján súlyozott, az ott meghatározott útvonalak felhasználhatók e ráterheléshez, és további keresésre nincs szükség.

## Bemenet

Bemenetként szükséges:

* Közúthálózatot leíró gráf.
* Forgalmi igény viszonylatonként.

## Kimenet

A művelet kimenete:

* A bemenetként kapott gráf éleihez rendelt forgalomnagyságok.
* Legrövidebb útvonalak (útvonal leírása, hozzá tartozó utazási ráfordítás összeg, hozzá tartozó forgalomnagyság) célforgalmi viszonylatonként

# Forgalom ráterhelés (Növekményes)

## Elméleti felépítés

A növekményes ráterhelés több, egymás utáni mindent-vagy-semmit ráterhelésből épül fel, melyek nem a teljes forgalmi igényt, hanem annak csak bizonyos részét terhelik a hálózatra egyszerre. Ezen ráterhelési lépések számát és részarányait előre rögzíteni kell – a növekményes módszer bemeneti paramétereként. Például három lépésben végzett növekményes ráterheléshez megadható 50-25-25%-nyi részarány sorozat.

A műveleti sorrend:

1. Legrövidebb, legkisebb ráfordítással járó úrvonal meghatározása minden célforgalmi kapcsolathoz az aktuális hálózati állapot alapján. Tehát itt – a második ráterhelési ciklustól kezdődően – szerephez jutnak a hálózati kapacitások, ellenállások is. Egy-egy útszakaszon az eljutási idő az azt igénybe vevő forgalom nagyságának függvénye lesz – minél nagyobb a forgalom, annál lassabban lehet megtenni ugyan azt a távolságot.
2. A célforgalmi értékeknek az aktuális lépéshez tartozó részarányai hozzáadása minden kapcsolatnál a megtalált útvonal éleihez. A fenti példában említett felosztás első lépésének esetén ez 50%­­-a, második lépése esetén pedig 25%-a lenne a teljes célforgalmi igényeknek.
3. Ha van még további lépés – azaz hozzáadandó részarány – akkor folytatás az 1. lépéstől.

A növekményes ráterhelés előnye – alternatívákat kínáló hálózat esetén – hogy bizonyos mértékben figyelembe veszi a forgalom felépülését. Egy-egy lépés után a kimerült kapacitású útszakaszokra nem kerül több forgalom, ha létezik alternatív útvonal a két körzet között. Hátránya, hogy a beállított részaránynál kisebb mértékben nem kerülhet forgalom egy-egy élre, mely a kapacitásnak csak igen durva megközelítését teszi lehetővé, illetve a túlterhelt útszakaszok forgalma a kapacitás meghaladását követően nem helyezhető át egy esetlegesen fellelt – ebben a helyzetben már – kisebb ráfordítással járó útvonalra. E korlátok figyelembe vételével több ésszerű felosztása is létezik a forgalmi igénynek, például 40-30-20-10%, vagy 33-33-34%. Megjegyzendő, hogy kifejezetten finom felosztás (pl.: 10×10%) sem vezet mindig jó megközelítéséhez a kapacitásoknak, hiszen az arányok mindig a teljes forgalomhoz képest mértek, tehát egy-egy nagy forgalmi igényű célforgalmi viszonylat még így is csak nagy lépésekkel osztható fel az útvonalak között. Ez jellemzően magas forgalmú körzetek esetén fordulhat elő, melyek sok (pl.: 20 féle) úton érhetők el, tehát forgalmuk a valóságban eloszlik, de egy-egy hozzá vezető útszakasz kapacitása önmagában nem éri el a legkisebb ráterhelési részarányból adódó nagyságot.

## Bemenet

Bemenetként szükséges:

* Közúthálózatot leíró gráf.
* Forgalmi igény viszonylatonként.
* Növekmények részarányai.

## Kimenet

A művelet kimenete:

* A bemenetként kapott gráf éleihez rendelt forgalomnagyságok.
* Minden megtalált – adott ciklusban legrövidebb – útvonal (az útvonal leírása, hozzá tartozó utazási ráfordítás összeg, hozzá tartozó forgalomnagyság) célforgalmi viszonylatonként

# Forgalom ráterhelés (Egyensúlyi)

Az egyensúlyi ráterhelési eljárás ugyan önálló ráterhelési mód, hatékonysága azonban jelentősen megnő, ha az előzőekben bemutatott növekményes ráterhelés lefuttatása után, azok eredményeire építve kerül alkalmazásra. Ha ez elmarad, az iteráció első ciklusai valójában egy mindent-vagy-semmit ráterhelést fognak elvégezni, melyet a következő ciklusok fokozatosan javítani fognak ugyan, de a konvergencia sebessége sokkal nagyobb akkor, ha egy – akár csak két részre osztott – növekményes ráterhelés eredményein alapulnak.

## Elméleti felépítés

Az eljárást jobban jellemzi az „egyensúly keresés” fogalma, mintsem a ráterhelés. Elvégzése során minden célforgalmi viszonylat finomításra kerül, addig a pontig, míg a teljes hálózaton nem található olyan útvonal, melyre akár egy darab járművet áthelyezve az a jármű kisebb ráfordítással juthatna el céljához. Ezen állapotot felhasználói egyensúlynak is nevezik, mely azt jelenti, hogy minden jármű a lehető leghatékonyabb úton jut el úti céljához. A „finomítás” művelete az egyes viszonylatok közt levő aktív – tehát forgalommal terhelt – útvonalak forgalmainak újra elosztását, illetve újabb alternatív útvonalak megkeresését és felhasználását takarja.

Maga az egyensúlykeresés két egymásba ágyazott iterációs ciklusból áll. A belső ciklus a célforgalmi viszonylatok kiegyenlítését végzi addig a pontig, mígnem a megkívánt mértéknél kisebb az egyes útvonalakon mérhető utazási ráfordítások különbsége. A külső ciklus ez után ellenőrzi a teljes hálózat egyensúlyi állapotát, új alternatív útvonalakat határoz meg, majd e műveletek eredményei alapján újra elindítja a belső ciklust szükség szerint.

Az egyensúly állapotát a pillanatnyi állapotban számolható utazási teljesítmény és az ideális állapot elméleti utazási teljesítményének százalékos eltérése (’relative gap’ = RG) adja.

$$RG=1-\frac{\sum\_{ij}^{}T\_{ij}∙c\_{ij}^{min}}{\sum\_{ijr}^{}V\_{ij}^{r}∙c\_{ij}^{r}}$$

ahol: $T\_{ij}^{r}$ az i kiindulási körzetből a j célkörzetbe, az r útvonalon haladó forgalomnagyság
 $c\_{ij}^{r}$ az i kiindulási és j célkörzet közti r útvonal utazási ráfordítása
 $c\_{ij}^{min}$ az i kiindulási és j célkörzet közt a legkisebb utazási ráfordítás, melyet általában a legutóbbi útvonalkeresés eredményeként adódó útvonal alapján lehet megállapítani.

Az egyensúlykeresés menete pontosabban:

1. Kezdeti paraméterek, határértékek beolvasása
2. Belső ciklus, minden célforgalmi viszonylatra végrehajtva
	1. legkisebb és legnagyobb ráfordítással járó útvonalpár kiválasztása

$T\_{ij}^{I}$, $c\_{ij}^{I}$, $T\_{ij}^{II}$, $c\_{ij}^{II}$ értékek, és a hozzájuk tartozó $r\_{ij}^{I}$, valamint $r\_{ij}^{II}$ útvonalak. Megjegyzendő, hogy itt a felső indexként alkalmazott római számok szándékos megkülönböztetésül szolgálnak a tetszőleges számosságban rendelkezésre álló útvonalak sorszámához képest. Például az ij körzetpár közt lehet 12 darab útvonal, melyek közül a legkisebb ráfordítású a 9-es, a legnagyobb pedig a 2-es. E két kiválasztott útvonal lesz a kiegyenlítési lépés I és II útvonala.

* 1. a forgalomnagyságok újra osztása a két útvonal közt . A cél olyan $T\_{ij}^{I}$ és $T\_{ij}^{II}$ értékek megtalálása, melyekhez tartozó $c\_{ij}^{I}$ és $c\_{ij}^{II}$ közel azonos értéket vegyenek fel.

Az utazási ráfordítások függvényei az útvonalhoz tartozó forgalmaknak:

$$c\_{ij}^{I}(T\_{ij}^{I})$$

és

$$c\_{ij}^{II}(T\_{ij}^{II})$$

A forgalmak azonban csak a két útvonal közt kerülnek újra osztásra, tehát a két forgalomnagyság összege állandó

$$T\_{ij}^{I}+T\_{ij}^{II}=T\_{ij}^{I+II}$$

Ezt felhasználva a célfüggvény csak egy változós

$$c\_{ij}^{I}\left(T\_{ij}^{I}\right)≈c\_{ij}^{II}(T\_{ij}^{I+II}-T\_{ij}^{I})$$

Mely felírható egy oldalra rendezve

$$c\_{ij}^{I}\left(T\_{ij}^{I}\right)-c\_{ij}^{II}(T\_{ij}^{I+II}-T\_{ij}^{I})≈0$$

A gyök keresés a felező módszerrel történik, mely használata előtt ellenőrizni kell, hogy teljesülnek-e alkalmazhatóságának feltételei. A költségfüggvények monoton növekvő jellege miatt az útvonalakon összegzett költségfüggvények eredménye ($c\_{ij}^{I}$ és $c\_{ij}^{II}$) is monoton növekedni fog. A két monoton növekvő összegzett költségfüggvény különbsége monoton nő, vagy monoton csökken. Tehát az, hogy van-e a felírt különbségnek metszéspontja az abszcisszával, ellenőrizhető a vizsgálati intervallum két végpontjánál (0 és $T\_{ij}^{I+II}$) felvett függvényérték előjelét megvizsgálva. Ha ezek ellentétesek, lesz metszéspont. Ha nem, akkor nem lesz metszéspont, és a módszer nem alkalmazható. Azonban ez nem jelenti azt, hogy nincs is eredménye az újraosztásnak, hiszen csak akkor fordulhat elő ilyen eset, ha a kedvezőbb útvonal annyival jobb a másiknál, hogy a teljes forgalomnagyságot átterhelve rá, jobb ráfordítás-összeg adódik, mint ha a másik útvonalon is maradna jármű.

A felező módszer a következőképp működik:

A gyök közelítése, az intervallumok felezése addig folytatódik, míg a következő feltételek nem teljesülnek.

Abszolút eltérés:

$$∆c=\left|c\_{ij}^{I}-c\_{ij}^{II}\right|\leq ∆c^{max}$$

Relatív eltérés:

$$ρc=\left|\frac{c\_{ij}^{I}}{c\_{ij}^{II}}-1\right|\leq ρc^{max}$$

Illetve a maximális iteráció szám nem kerül-e túllépésre.

Megjegyzendő, hogy az I és II utazási ráfordítások értékei a kezdeti kiválasztásuk óta módosultak, hiszen a forgalomnagyságok átrendezésre kerültek a két útvonal közt, tehát a kettő relációja nem állapítható meg előre.

* 1. a nulla forgalmú útvonal kitörlése
	2. a célforgalmi viszonylat összes útvonalához tartozó utazási ráfordítás értékek frissítése
	3. a frissítés utáni legnagyobb és legkisebb utazási ráfordítású útvonal pár kiválasztása, és az előzőekhez hasonlóan a két érték ellenőrzése $∆c$-re és $ρc$-re.
	4. ha a relatív és abszolút különbségek meghaladják a beállított határértékeket, a belső ciklus újra futtatása az a. ponttól kezdve.
1. A teljes hálózat összes útvonalán az utazási ráfordítás összegek frissítése
2. Minden célforgalmi viszonylathoz a legkisebb ráfordítással járó útvonalak meghatározása, és ellenőrzése, hogy ezek az útvonalak már szerepelnek-e a meglévő, forgalommal járt útvonalak közt.
3. Ha új útvonal került meghatározásra, és a megengedett legnagyobb (külső) iteráció szám még nem került átlépésre, valamint a relatív távolság értéke is a megkívánt értéknél nagyobb, az új iteráció kezdése a 2. ponttól.

## Bemenet

Bemenetként szükséges:

* Közúthálózatot leíró gráf.
* Forgalmi igény viszonylatonként.
* Megelőző ráterhelés (mindent-vagy-semmit, vagy növekményes) eredményei:
	+ A közúthálózati gráf éleihez rendelt forgalomnagyságok.
	+ Minden megtalált útvonal (az útvonal leírása, hozzá tartozó utazási ráfordítás összeg, hozzá tartozó forgalomnagyság) célforgalmi viszonylatonként

## Kimenet

A művelet kimenete:

* A bemenetként kapott gráf éleihez rendelt forgalomnagyságok.
* Minden megtalált – adott ciklusban legrövidebb – útvonal (az útvonal leírása, hozzá tartozó utazási ráfordítás összeg, hozzá tartozó forgalomnagyság) célforgalmi viszonylatonként